Sobre a existência de monopolos magnéticos

Mario Schönberg

Na teoria eletromagnética de Maxwell e Lorentz se postula a inexistência de massas magnéticas, sendo todo o magnetismo atribuído a correntes elétricas. Até hoje não ficou esclarecida a questão de saber se essa hipótese é necessária ou se é possível abandoná-la sem alterar profundamente a estrutura da teoria eletromagnética. Nos últimos anos o problema das massas magnéticas foi abordado sob outro ponto de vista. Admitindo a existência dessas massas, estudou-se, pela mecânica quântica, o movimento de um elétron num campo por elas criado. Como se sabe, na equação de Schrödinger do elétron, intervém os potenciais do campo eletromagnético e esses potenciais só existem quando o campo magnético é solenoidal, isto é, quando não há massas magnéticas. Daí a crença de que o movimento do elétron num tal campo não fosse sucetível de descrição quântica. Por uma engenhosa análise dos fatores de fase das funções de onda, Dirac mostrou que o problema podia ser tratado quanticamente se as massas magnéticas fossem múltiplos inteiros de

$$\mu = \frac{hc}{4\,\pi\,e} \quad . \tag{1}$$

Posteriormente, Jordan chegou às mesmas conclusões, estudando a segunda quantização das grandezas "eich-invariantes" dum campo de ondas eletrônicas. Essas pesquisas mostraram que o problema da interação do campo eletromagnético com um elétron não introduz dificuldades que possam justificar a inexistência de massas magnéticas, não resolvem, porém, de modo definitivo a questão dos monopolos magnéticos.

Na presente nota, propomo-nos mostrar que a natureza geométrica do campo eletromagnético (axialidade do campo magnético) não permite a existência de massas magnéticas, se quisermos conservar a massa com o seu caráter de grandeza escalar. Com efeito, um monopolo num campo

magnético $\vec{H}$ está submetido à força

$$\vec{F} = \mu \vec{H} \quad . \tag{2}$$

Ora, a força $\vec{F}$ é um vetor polar e o campo magnético $\vec{H}$ um vetor axial, logo uma relação do tipo (2) só é possível se μ for um pseudo escalar, isto é, se trocar de sinal quando se passa de um sistema de eixos dextrógiro a um sistema sinistrógiro. À mesma conclusão podemos chegar, considerando a expressão da energia W de um dipolo magnético de momento $\vec{M}$ num campo $\vec{H}$

$$W = -\vec{M} \cdot \vec{H} \quad . \tag{3}$$

A energia W é um escalar, $\vec{H}$ sendo um vetor axial o mesmo deve acontecer com $\vec{M}$. Para que um momento magnético seja axial é preciso que a massa magnética seja um pseudo escalar, sendo o momento o produto de uma massa por um vetor polar. É curioso observar que nada de análogo ocorre com as cargas elétricas devido à polaridade do campo elétrico.

As considerações precedentes são largamente independentes das equações de Maxwell, porquanto o caráter axial do campo magnético já resulta da lei de Biot e Savart, aplicada ao movimento de uma carga elétrica "e".

$$\vec{H} = \frac{e}{c} \frac{\vec{v} \, \Lambda \, \vec{r}}{r^3} \quad . \tag{4}$$

O estudo das equações de Maxwell nos conduzirá não só aos resultados precedentes como também permitirá pôr em evidência novos aspectos da questão. Tomaremos o sistema Maxwelliano sob forma analítica, o cálculo vetorial sendo inadequado para a discussão do caráter de polaridade das

grandezas do campo:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\delta Hz}{\delta y} - \frac{\delta Hy}{\delta z} &= \frac{1}{c}\,\frac{\delta Ex}{\delta t} + \frac{4\pi}{c}\,\rho\, v_x \\
\frac{\delta Hx}{\delta z} - \frac{\delta Hz}{\delta x} &= \frac{1}{c}\,\frac{\delta Ey}{\delta t} + \frac{4\pi}{c}\,\rho\, v_y \\
\frac{\delta Hy}{\delta x} - \frac{\delta Hx}{\delta y} &= \frac{1}{c}\,\frac{\delta Ez}{\delta t} + \frac{4\pi}{c}\,\rho\, v_z \\
\frac{\delta Ex}{\delta x} + \frac{\delta Ey}{\delta y} + \frac{\delta Ez}{\delta z} &= 4\,\pi\,\rho
\end{aligned}\right\} \tag{5a}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\delta Ez}{\delta y} + \frac{\delta Ey}{\delta z} &= -\frac{1}{c}\,\frac{\delta Hx}{\delta t} \\
\frac{\delta Ex}{\delta z} - \frac{\delta Ez}{\delta x} &= -\frac{1}{c}\,\frac{\delta Hy}{\delta t} \\
\frac{\delta Ey}{\delta x} - \frac{\delta Ex}{\delta y} &= -\frac{1}{c}\,\frac{\delta Hz}{\delta t} \\
\frac{\delta Hx}{\delta x} + \frac{\delta Hy}{\delta y} + \frac{\delta Hz}{\delta z} &= 4\,\pi\,\sigma
\end{aligned}\right\} \tag{5b}$$

A última equação (5b) foi generalizada introduzindo uma densidade magnética. O sistema de equações (5b) não é relativisticamente invariante, pois a existência de massas magnéticas em repouso num dado sistema de referência equivale à existência de uma corrente magnética para um observador em movimento relativamente ao sistema considerado. Devemos, portanto, introduzir nos segundos membros das três primeiras equações (5b), termos representando uma corrente magnética:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\delta Ez}{\delta y} - \frac{\delta Ey}{\delta z} &= -\frac{1}{c}\,\frac{\delta Hx}{\delta t} + \frac{4\pi}{c}\,\sigma\, u_x \\
\frac{\delta Ex}{\delta z} - \frac{\delta Ez}{\delta x} &= -\frac{1}{c}\,\frac{\delta Hy}{\delta t} + \frac{4\pi}{c}\,\sigma\, u_y \\
\frac{\delta Ey}{\delta x} - \frac{\delta Ex}{\delta y} &= -\frac{1}{c}\,\frac{\delta Hz}{\delta t} + \frac{4\pi}{c}\,\sigma\, u_z
\end{aligned}\right\} \tag{5c}$$

Recordando que essas equações traduzem a lei de indução de Faraday-Neumann, vemos que a existência de massas magnéticas levaria a uma modificação dessa lei.

A quarta equação (5a) mostra que $\vec{E}$ deve ser um vetor polar, a densidade elétrica ρ sendo escalar. Das três primeiras equações (5a) concluímos que $\vec{H}$ é axial e portanto a densidade magnética σ é um pseudo escalar, em virtude da quarta equação (5b) ou (5c). Isto é, por uma simetria em relação à origem σ troca de sinal:

$$\left.\begin{array}{c} (x,y,z) \to (x',y',z') = (-x,-y,-z) \\ \sigma \to \sigma' = -\sigma \end{array}\right\} \quad . \tag{6}$$

Do que precede resulta que $(\sigma, \vec{\sigma}\mu)$ formam um trivetor do espaço quadridimensional, elemento geométrico análogo ao vetor axial do espaço tridimensional.

Os resultados da discussão das equações (5) podem ser expressos de modo mais compacto, por meio do cálculo tensorial. Introduzindo o tensor antisimétrico do campo $F_{\mu\nu}$

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & Hz & -Hy & -i\,Ex \\ -Hz & 0 & Hx & -i\,Ey \\ Hy & -Hx & 0 & -i\,Ez \\ i\,Ex & i\,Ey & i\,Ez & 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{7}$$

As equações de Maxwell para o vácuo têm a forma

$$\left.\begin{array}{l} \sum \dfrac{\delta F_{\mu\nu}}{\delta x_\nu} = 0 \\ \dfrac{\delta F_{\mu\nu}}{\delta x_\lambda} + \dfrac{\delta F_{\mu\lambda}}{\delta x_\mu} + \dfrac{\delta F_{\lambda\mu}}{\delta x_\nu} = 0 \end{array}\right\} \quad . \tag{8}$$

A única generalização do sistema (8) que conserva a linearidade e a invariância relativista, é a que se obtém igualando o vetor quadrimensional $\sum \dfrac{\delta F_{\mu\nu}}{\delta x_\nu}$ a um vetor $\dfrac{4\,\pi}{c} S_\mu$ independente de $F_{\mu\nu}$ e o trivetor $\dfrac{\delta F_{\mu\nu}}{\delta x_\lambda} +$

$\dfrac{\delta F_{\nu\lambda}}{\delta x_\mu} + \dfrac{\delta F_{\lambda\mu}}{\delta x_\nu}$ a um trivetor $\dfrac{4\,\pi}{c}\,\sigma_{\lambda\mu\nu}$ também independente de $F_{\mu\nu}$. Assim obtemos o sistema

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(a)} & \sum \dfrac{\delta F_{\mu\nu}}{\delta x_\nu} = \dfrac{4\,\pi}{c}\,S_\mu \\ \text{(b)} & \dfrac{\delta F_{\mu\nu}}{\delta x_\lambda} + \dfrac{\delta F_{\nu\lambda}}{\delta x_\mu} + \dfrac{\delta F_{\lambda\mu}}{\delta x_\nu} = \dfrac{4\,\pi}{c}\,\sigma_{\lambda\mu\nu} \end{array}\right\} \quad . \tag{9}$$

As equações (9a) e (9b) coincidem respectivamente com (5a) e (5b). Vemos que a carga e a corrente magnética podem ser identificadas com as componentes de um trivetor quadridimensional, elemento de caráter geométrico e físico completamente diferente de um vetor. Daí a impossibilidade de introduzir uma massa magnética com propriedades análogas às de uma carga elétrica.

Annais da Academia Brasileira de Sciencias, Vol. XI, N. 3, 30 Setembro de 1939, pp. 267–271

Apresentado pelo acadêmico Menezes de Oliveira.